Tema 1: Matrices y Sistemas lineales de ecuaciones

Ejercicios

1. Halla una forma escalonada, el rango, y las matrices canónica por filas y de paso para cada una de las siguientes matrices:

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{(c) } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 8 & 10 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, ¿qué condición debe verificar $k \in \mathbb{R}$ para que $\operatorname{rg}(A + kB) < 2$?

3. Calcula la inversa, si existe, de las siguientes matrices:

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{(c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(e) } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(f) } F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Calcula la inversa, si existe, de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Calcula, según los valores de n, el rango de las matrices:

$$\text{(a) } A_n = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & 1 \\ 1 & n+1 & 1 \\ 1 & 1 & n+1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b) } B_n = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & n \\ 1 & n+1 & 1 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

   Obtén la matriz inversa en los casos que se pueda.

6. Resuelve, por el método de Gauss, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{(a) } \begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 2x + y - z = 6 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}; \qquad \text{(b) } \begin{cases} x + y + z + t = -2 \\ x - y - z + t = -4 \\ x - y + z + t = -6 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases};$$

$$\text{(c) } \begin{cases} 3x + y - z = 10 \\ x - 2y - z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 7 \end{cases}; \qquad \text{(d) } \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 9y - 5z = 0 \end{cases}.$$

7. Discute, según los valores reales de los parámetros, los siguientes sistemas lineales:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \\ 5x-11y+9z=k \end{array} \right. ; \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{array} \right. ; \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x-2y+3z=1 \\ 2x+ky+6z=6 \\ -x+3y+(k-3)z=0 \end{array} \right. ;$$

$$\text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} y+z=2 \\ x+y+z=a \\ x+y=2 \end{array} \right. ; \quad \text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} ax+by+z=1 \\ ax+y+bz=1 \\ ax+y+z=b \end{array} \right. ;\text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{array} \right. ;$$

$$\text{(g)} \left\{ \begin{array}{l} ax+by+2z=1 \\ ax+(2b-1)y+z=1 \\ ax+by+(b+3)z=2b-1 \end{array} \right. .$$

Resuelve, cuando sea posible, los que dependen de un único parámetro.

8. Resuelve la ecuación matricial $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ donde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{(a)} \ \mathbf{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \text{(b)} \ \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 10 & 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\ X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

10. Siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$, encuentra todas las matrices $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ tales que $AB=\mathbf{0}$.

11. Obtén todas las matrices $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ que conmutan con la matriz diagonal $D=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ con $x,y \in \mathbb{R}$.

12. Encuentra todos los polinomios $p(x)$ de grado 2, con coeficientes reales, tales que: (a) $p(1)=2$, $p(-1)=4$ y $p(3)=16$; (b) $p(1)=p(-1)=0$.

13. Elimina parámetros en las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x=1+\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=1-3\alpha \end{array} \right. ; \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x=1-3\alpha+\beta \\ y=\alpha-2\beta \\ z=2+\beta \end{array} \right. ; \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\gamma \end{array} \right. ;$$

$$\text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x_1=a+2b-c \\ x_2=a-b \\ x_3=3b \\ x_4=b+c \\ x_5=a-b+2c \end{array} \right. ; \text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x_1=a+b+2c \\ x_2=a+2b+3c \\ x_3=a+c \\ x_4=0 \\ x_5=a-b \end{array} \right. .$$

Soluciones

1. (a) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{rg}(A) = 3$, $A_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;
   (b) $B_e = B_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{rg}(B) = 1$, y $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
   (c) $C_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}$, $\text{rg}(C) = 3$, $C_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$,
   y $E = \begin{pmatrix} -14 & 1 & -6 \\ -11 & 1 & -4 \\ 13 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $k = -1$.

3. (a) $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; (b) No existe B^{-1}; (c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}$;
   (d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ -8 & 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; (e) $E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;
   (f) $F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. (a)$\text{rg}(A_n) = \begin{cases} 3 & \text{, si } n \neq 0 \text{ y } n \neq -3 \\ 2 & \text{, si } n = -3 \\ 1 & \text{, si } n = 0 \end{cases}$; $A_n^{-1} = \frac{1}{n(n+3)} \begin{pmatrix} n+2 & -1 & -1 \\ -1 & n+2 & -1 \\ -1 & -1 & n+2 \end{pmatrix}$, si $n \neq 0$ y $n \neq -3$.
   (b) $\text{rg}(B_n) = \begin{cases} 3 & \text{, si } n \neq 0 \text{ y } n \neq -2 \\ 2 & \text{, si } n = 0 \text{ o } n = -2 \end{cases}$;
   $B_n^{-1} = \frac{1}{n^2(n+2)} \begin{pmatrix} n(n+1) & -n & -n^2-n+1 \\ -n & n(n+1) & -1 \\ 0 & 0 & n(n+2) \end{pmatrix}$, si $n \neq 0$ y $n \neq -2$.

6. (a) $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$.
   (b) $x = -3 - \lambda$, $y = 2$, $z = -1$, $t = \lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Sistema incompatible.
(d) $x = -2\lambda$, $y = 3\lambda$, $z = 5\lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. (a) Si $k \neq 4$ el sistema es incompatible; y si $k = 4$ es compatible indeterminado ($x = -5/2 + 7\lambda$, $y = -3/2 + 4\lambda$, $z = \lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$).
(b) Si $a = -2$ el sistema es incompatible; si $a = 1$ es compatible indeterminado ($x = 1 - \lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$); y si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ es compatible determinado($x = y = z = \frac{1}{a+2}$).
(c) Si $k = -4$ el sistema es incompatible; si $k = 0$ es compatible indeterminado ($x = 3 - 3\lambda$, $y = 1$, $z = \lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$); y si $k \neq -4$ y $k \neq 0$ es compatible determinado ($x = \frac{k+9}{k+4}$, $y = \frac{4}{k+4}$, $z = \frac{1}{k+4}$).
(d) Para cualquier valor de a el sistema es compatible determinado ($x = a - 2$, $y = 4 - a$, $z = a - 2$).
(e) Si $a = 0$ y $b = -2$ el sistema es compatible indeterminado con un grado de indeterminación; si $b = 1$ es compatible indeterminado con dos grados de indeterminación; si $a = 0$, $b \neq -2$ y $b \neq 1$ es incompatible; y si $a \neq 0$ y $b \neq 1$ el sistema es compatible determinado.
(f) El sistema es incompatible si $b = 0$, si $0 \neq b \neq -2$ y $a = -2$, o si $0 \neq b \neq 1$ y $a = 1$; es compatible determinado si $b \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -2$; y es compatible indeterminado si $a = b = -2$ (con un grado de indeterminación) o $a = b = 1$ (con dos grados de indeterminación).
(g) El sistema es incompatible si $b = -1$ o si $a = 0$ y $b \neq 1$; es compatible indeterminado con un grado de indeterminación si $b = 1$; y es compatible determinado si $a \neq 0$, $b \neq 1$ y $b \neq -1$.

8. (a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; (b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

9. (a) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;
(c) $X = \begin{pmatrix} -2-\alpha & 3-\beta & 1-\gamma & -\delta \\ \alpha & 1+\beta & \gamma & \delta \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

10. Si $m \neq 6$, $B = \mathbf{0}$; y si $m = 6$, $B = \begin{pmatrix} -2\alpha & -2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

11. Si $x = y$, B es arbitraria; y si $x \neq y$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ con $a, d \in \mathbb{R}$.

12. (a) $p(x) = 2x^2 - x + 1$; (b) $p(x) = \lambda(x^2 - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

13. (a) $\left\{ \begin{array}{l} x - y = -1 \\ 3x + z = 4 \end{array} \right.$; (b) $x + 3y + 5z = 11$;
(c) Al eliminar parámetros no aparece ninguna condición, pues esas ecuaciones

paramétricas representan a todo $\mathbb{R}^3$;

(d) $\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{array} \right.$; (e) $\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right.$.